Algebra de diagramas en bloque y transformadas de Laplace. Función de transferencia.

Diagramas en bloque.

En estos esquemas el elemento en estudio se presenta a modo de caja negra en la cual una salida está relacionada con una entrada a través de modificaciones o transformaciones que le impone dicha caja negra.

A su vez, el comportamiento de la caja negra se representa mediante una ecuación (A). Esquemáticamente:

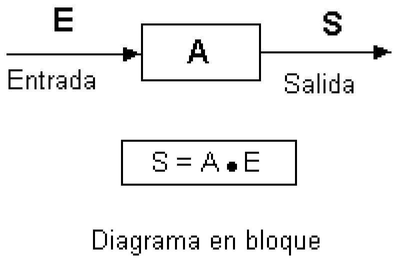
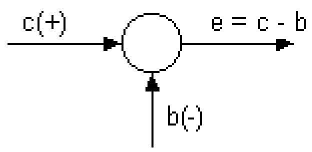


Figura 2.1

La ecuación que se encuentra dentro del bloque representa el comportamiento dinámico del elemento bajo estudio y que pueden tomar la forma de ecuaciones diferenciales, relaciones gráficas, etc.

Esta ecuación que relaciona la entrada con la salida del bloque se denomina ***función de transferencia***.

Cada bloque sólo tiene una entrada y una salida., pero pueden existir puntos donde haya flujos de más de una señal. Para componer la señal resultante de ambas, por convención, se utiliza un círculo para representar la suma algebraica de las señales que ingresan a ese punto y una señal de salida correspondiente a dicho resultado.



Sumador algebraico

Figura 2.2

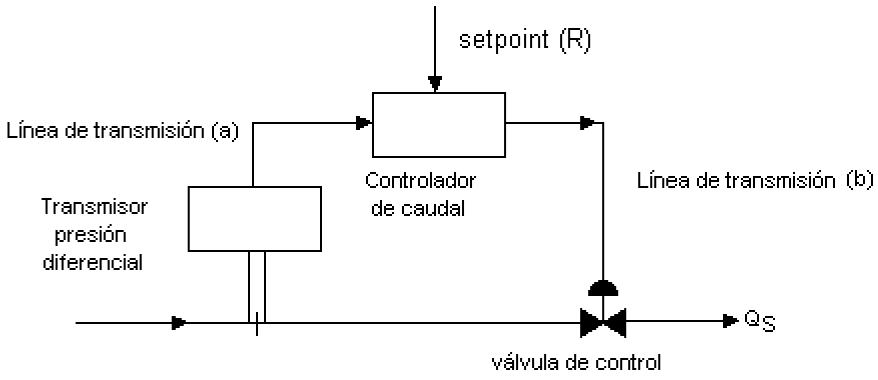
En cada señal se especifica el signo correspondiente a la operación algebraica.

Las reglas básicas del álgebra de diagramas de bloque, son:

1. A cada bloque le entra una sola señal y lo abandona una sola.
2. A un sumador entran señales, cuyos signos deben especificarse, y lo abandona una sola señal.

Para obtener el diagrama en bloques, se observa el sistema físico real y se va dividiendo este en secciones según su función y se identifican sus respectivas entradas y salidas. Los distintos bloques se van interconectando entre sí de acuerdo con el sentido en el que la información recorre el sistema físico.

Veamos esto mediante el ejemplo de un lazo de control de caudal:



Lazo de control de caudal.

Figura 2.3

En este esquema los elementos que lo conforman son:

1. Placa orificio o elemento primario medidor de caudal.
2. Transmisor de presión diferencial, convierte el ΔP producido a través de la placa orificio en una señal eléctrica o neumática.
3. Línea de transmisión (a).
4. Controlador de caudal, compara el valor real de caudal con el valor de ajuste o set-point y produce una señal para corregir desviaciones.
5. Línea de transmisión (b).
6. Válvula de control o elemento final de control.

Para su representación en un diagrama en bloque se debe analizar cómo funciona el regulador. Este mide la variable a controlar y la compara con un valor de referencia (set-point) y para ello resta sus valores. Esta diferencia o error se emplea para calcular la posición que debe adoptar el elemento de acción final.

Tanto la señal controlada como la manipulada se conducen a través de líneas de transmisión, por lo que deben incluirse en el diagrama en bloque, como así también las características del controlador y de la válvula.

Todo esto, puede expresarse mejor en forma gráfica, como muestra la figura 2.4

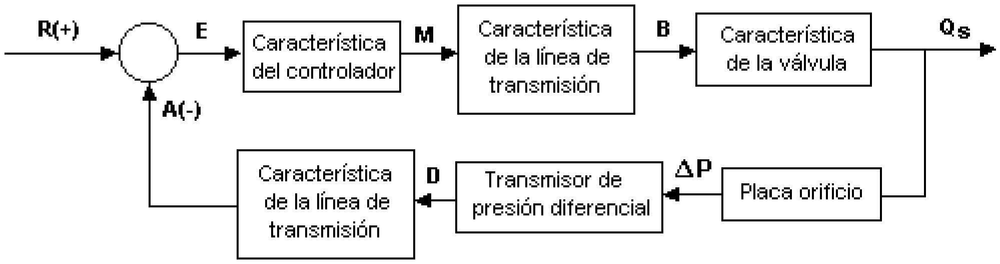


Diagrama en bloque del lazo de control.

Figura 2.4)

Con respecto a las líneas de transmisión debemos aclarar que su característica está dada por la velocidad con que se transmite la señal, pudiendo ser muy rápidas, en cuyo caso: B=M y D=A, o puede ser lenta o muy lenta, como en el caso de la líneas neumáticas, en cuyo caso: $B \neq M$ y $D \neq A$ y existe un desplazamiento en el tiempo entre entrada y salida.

Del diagrama vemos que este es un lazo cerrado con realimentación dado que instante a instante, a través de la señal error (E) el controlador modifica su acción para hacer que ese error disminuya.

En general los lazos de control con realimentación toman la forma que hemos visto en este ejemplo.

Funciones de transferencia.

Consideremos el siguiente caso:

A un tanque pulmón, de un producto x le llega un flujo Q_1 y en condiciones estacionarias le abandona un flujo $Q_2=Q_1$.

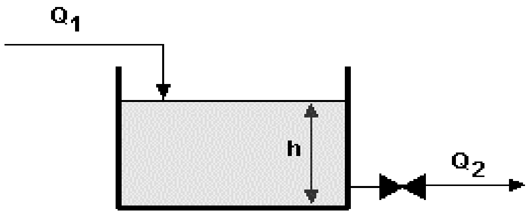


Figura 2.5

En un momento dado se corta Q_1 ($Q_1=0$) y se desea conocer el comportamiento de Q_2 y la altura del tanque durante un cierto tiempo hasta que pueda reestablecerse Q_1.

Por balance sabemos que:

$$\text{Entrada} - \text{Salida} = \text{acumulación} \qquad (1)$$

$$Q_1\, dt - Q_2\, dt = A * dh \qquad (2)$$

con: V= volumen del tanque
A= área del tanque

El caudal de salida (Q_2) variará en función del nivel de líquido en el tanque y la resistencia al paso del fluído (Rh), que está determinada principalmente por cada posición de apertura de la válvula de salida.

En principio podemos adoptar la siguiente relación:

$$Q_2(t) = \frac{1}{Rh}.h(t) \qquad (3)$$

Si reemplazamos (3) en (2),

$$Q_1 * dt - \frac{h(t)}{Rh} * dt = A * dh \qquad (4)$$

$$Q_1 = A * \frac{dh}{dt} + \frac{h(t)}{Rh} \qquad (5)$$

Si se cierra el caudal de entrada, el tanque se vaciará y considerando t=0 al tiempo que $Q_1=0$ la ecuación 5 nos queda:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{Rh * A} * h\,(t) \qquad (6)$$

Si Rh no es función de h, se trata de una ecuación diferencial lineal y si además es constante su integración es sencilla. En la realidad Rh no cumple con estas condiciones como veremos más adelante. Decimos entonces que el modelo de análisis adoptado es sólo una aproximación. Sin embargo, se pueden definir una zona estrecha de altura del tanque donde Rh sea lineal y constante sin introducir error significativo al cálculo. Para cubrir otra zona se encuentra otro valor de Rh y así se ir puede resolviendo el valor que irá tomado h para todo el tanque.

Integramos en el entorno de linearización en el cual Rh se mantiene constante.

$$\int_{h_0}^{h} \frac{dh}{h(t)} = -\frac{1}{A*Rh}\int_0^t dt \qquad (8)$$

$$Ln\,h(t) - Ln\,h_0 = Ln\frac{h(t)}{h_0} = -\frac{1}{A*Rh}*t \qquad (9)$$

$$h(t) = h_0 * e^{-\frac{1}{A*Rh}t} \qquad (10)$$

Si damos valores a la ecuación (1) y la representamos gráficamente:

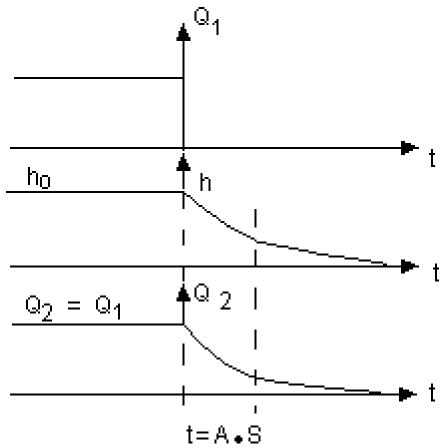


Figura 2.6

Evidentemente el modelo matemático (Q_2=h/R) no tiene validez física en toda la extensión (hasta h=0) pero sí es lo suficientemente aproximada para pequeños valores de variación de h que es lo que interesa al problema del control que trata que las variables no se alejen del punto de operación fijado.

Definiciones y restricciones

El comportamiento ya sea en estado estacionario o transitorio (dinámico) de un sistema puede ser determinado, resolviendo las ecuaciones diferenciales que lo representan.

Esto puede ser una tarea larga y tediosa, pero existe una técnica para resolverlas que es el uso de la *Transformada de Laplace*. En estos casos el problema se plantea en términos de una segunda variable que permite resolver el problema en forma algebraica. Luego de hallada esta solución, regresando a la variable original se obtiene la solución de la ecuación diferencial planteada.

La limitación de este procedimiento es que sólo puede ser aplicado en ecuaciones diferenciales lineales,

En general una ecuación diferencial lineal se expresa como:

$$p_n\frac{d^n\,y(t)}{dt^n} + p_{n+1}\frac{d^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + p_0\,y(t) = x(t) \qquad (11)$$

Donde los coeficientes p_i no son funciones de y(t) o sus derivadas pero pueden variar en el tiempo. En general una solución con los coeficientes dependientes del tiempo es difícil y no se hace.

En la mayoría de los procesos las ecuaciones lineales que los representan no son lineales para un rango amplio de aplicación, pero sí en un rango estrecho. En este último caso los coeficientes se pueden considerar independientes del tiempo y constantes sin mayor error y el resultado obtenido es aceptable a los fines prácticos.

Entonces tenemos que para un proceso de control la ecuación diferencial básica que describe el comportamiento de un sistema, en un entorno limitado del punto de operación es generalmente de la forma:

$$m_n \frac{d^n\, y(t)}{dt^n} + m_{n-1} \frac{d^{n-1}\, y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + m_0\, y(t) = x(t) \qquad (12)$$

y puede resolverse en forma algebraica por medio de las transformadas de Laplace como se verá mas adelante.

Transformadas de Laplace.

Son un caso particular de las transformadas de integración cuya ecuación general es:

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt \qquad (13)$$

donde:

g(s)= función transformada
K(s,t)= núcleo de la transformación

La ecuación 14) nos demuestra que hemos pasado de un dominio temporal a uno nuevo dominado por la variable s.

Para las transformadas de Laplace se cumple que:

$$a = 0 \quad b = \infty \quad K(s,t) = e^{-s*t}$$

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-s.t} * f(t) * dt \qquad (14)$$

Resumiendo: f(t) (en el dominio temporal) mediante una transformada considerada por la ecuación (14), pasa a ser una función g(s) (donde $s=\alpha+j*\omega$) en el dominio de los números complejos.

Si observamos la ecuación 14, vemos que la función f(t) es integrada entre límites, por ende su resultado es un número. Este número es un número genérico de una nueva variable "s" y como tal puede ser pasible de operaciones algebraicas. La transformada de Laplace es un método operacional que se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales en los problemas de dinámica de control. Con este método se transforma una ecuación diferencial lineal en una algebraica como veremos más adelante.

Por convención, la notación utilizada es:

$$L[f(t)] = g(s) \qquad (15)$$

La operación inversa se denota:

$$L^{-1}[g(s)] = f(t) \qquad (16)$$

También es de práctica de utilizar la notación con letras mayúsculas para las transformadas y con letras minúsculas para las funciones en el campo temporal. Por ejemplo: G(s) o F(s) es la transformada que se corresponde a la función temporal f(t), H(s) es la trasformada de h (t), etc.

La transformada de Laplace de una función *f (t)* existe si la integral de Laplace converge, es decir, tiene un valor finito.

Una forma como se puede interpretar esta convergencia es considerando que la función a transformar por Laplace sea e^{at}. En este caso,

$$L[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt \,. \qquad (17)$$

Si $s = \sigma + j\omega$, (18)

$$L\left[e^{at}\right]=\int_0^\infty e^{[-(\sigma-a)-j\omega]t}dt=\int_0^\infty \underbrace{e^{-(\sigma-a)t}}_{A}\,\underbrace{e^{-j\omega t}}_{B}\,dt \qquad (19)$$

Analizamos considerando la parte real solamente, porque la parte imaginaria B tiende a cero cuando ω es positivo y t tiende a infinito.

$$B = e^{-j\omega t} \qquad (20)$$

Si analizamos, la parte real A vemos que cuando *t* tiende a infinito para que converja la integral,

$$A = e^{-(\sigma-a)t}\ , \qquad (21)$$

(σ-a) tiene que ser positivo. En consecuencia, debe ser **σ > a**, si la función exponencial a transformar tiene una componente real mayor a σ, la función no se puede transformar por Laplace.

Se puede extender esta conclusión a toda otra función que crezca más rápidamente que la exponencial del núcleo de la transformación; por ejemplo

$$f(t) = e^{at^2} \qquad (22)$$

Todas las funciones que usaremos en este libro poseerán transformadas de Laplace con valores convergentes. En consecuencia, no será necesario averiguar si lo son cada vez que necesitemos utilizarlas.

Como resultado de las operaciones algebraicas, la función transformada resulta en general un cociente entre dos polinomios en "*s*." Por ejemplo,

$$F(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)} \qquad (24)$$

En estos polinomios se denominan ceros a los valores de *"s"* que llevan a cero el valor de la trasformada, por ejemplo *s = -3* y s = ∞. En forma análoga se denominan polos, a los valores de *"s"* que llevan el valor de *F(s)* a infinito, en este caso *s = -1* y *s = -2*.

Se verifica que el número de ceros y polos son iguales.

$$\begin{aligned}&\text{Son ceros}: \quad s=-3 \text{ y } s=\infty \qquad (2\,\text{ceros})\\ &\text{Son polos}: \quad s=-1 \text{ y } s=-2 \qquad (2\,\text{polos})\end{aligned} \qquad (25)$$

Propiedades de las Transformadas de Laplace.

1) Por definición: Transformada y antitransformada, L y L^{-1}son únicas y entra ambas existe una relación biunívoca.

$$L[f(t)]=g(s) \quad y \quad L^{-1}[g(s)]=f(t) \qquad (26)$$

2) Linealidad: la transformada de una combinación lineal de funciones es la suma de la combinación lineal de las transformadas.

$$L[a.f(t)+b.h(t)]=a\,L[f(t)]+b\,L[h(t)] \qquad (27)$$

Siendo a y b constantes que son independientes de las operaciones de integración en el proceso de transformación.

3) Teorema del cambio: si una función temporal esta multiplicada por una función exponencial la transformada de este producto es igual a la transformada de la función pero desplazada por el coeficiente del exponencial.

$$L\left[e^{at}\,f(t)\right]=g(s-a) \qquad (28)$$

Demostración: la transformada de la (28) es

$$\int_0^\infty e^{-st}\times e^{at}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\times f(t)dt \qquad (29)$$

Si llamamos a $(s-a)=p$, podemos escribir, y reemplazando en (30), resulta:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\times f(t)dt = g(p) = g(s-a) \qquad (30)$$

4) Teorema del desplazamiento: la transformada de una función desplazada es igual a la transformada de la función sin desplazar, multiplicada por una exponencial cuyo coeficiente es de igual magnitud al desplazamiento. Esta propiedad es de frecuente aplicación cuando aparecen las demoras por "tiempo muerto" (time delay), como se verá mas adelante.

$$L[f(t-a)] = e^{-s.a}\times L[f(t)] \qquad (31)$$

Demostración:

$$\int_0^\infty e^{-st}\times f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}\times f(\tau)\times d\tau \qquad (32)$$

Donde $\boldsymbol{\tau = t - a}$. (33)

$$\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}\times f(\tau)\times d\tau = e^{-sa}\times\int_0^\infty e^{-s\tau}\times f(\tau)\times d\tau = e^{-sa}\times L[f(t)] \qquad (34)$$

En la resolución de la integral, cuando $t \to 0, \tau \to -a$ y cuando $t \to \infty, \tau \to \infty$

5) Transformada de la derivada:

a) La transformada de la derivada primera de una función es igual a la transformada de la función sin derivar multiplicad por s, menos el valor de la función sin derivar para t=0:

$$L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0) \qquad (35)$$

b) La transformada de la derivada segunda de una función es igual a la transformada de la función sin derivar multiplicada por s^2 menos el valor de la función sin derivar para t=0 multiplicada por s menos la derivada primera de la función para t=0.

$$L[f''(t)] = s^2\,L[f(t)] - s\,f(0) - f'(0) \qquad (36)$$

c) En general:

$$L[f^n(t)] = s^n\,L[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0) \qquad (37)$$

Demostración:

Para comprobar el teorema de diferenciación en la ecuación (a) se procede a resolver la integral de Laplace por partes:

$$\int_a^b v\times du = v\times u\Big|_a^b - \int_a^b u\times dv \qquad (38)$$

Definiendo los términos de la integración y reemplazado en la ecuación (38) y operando se reproduce la ecuación (35):

$v = e^{-st}$, $dv = (-s).e^{-st}.dt$

$du = f'(t)dt$ $\quad u = f(t)$,

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.f'(t).dt = f(t).e^{-st}.\Big|_0^\infty - \int_0^\infty [f(t)].e^{-st}.(-s).dt$$

$$= 0 - |f(o)| + s.\int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt = -f(o) + s.L[f(t)]$$

6) <u>Transformada de la integral:</u>

La transformada de la integral de una función es igual a la transformada de la función dividida por s más el valor acumulado por la integral para t=0, también dividida por s:

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s}L[f(t)] + \frac{1}{s}\int f(t)\Big|_{para\ \ t=0} \qquad (39)$$

Se puede demostrar aplicando la trasformada de la derivada, ecuación (35), considerando que f (t)] es la integral de f'(t) y cambiando la nomenclatura por el orden superior de integración.

Teoremas del valor final y del valor inicial: Estos teoremas permiten saber el valor inicia y final de la función temporal sin necesidad de de realizar la operación de antitransformación. El último es útil en sistemas de control para conocer el valor en que el sistema se estabiliza.

7) <u>Teorema del valor final:</u>

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\ g(s) \qquad (40)$$

La demostración aplica la transformada de la derivada, expresión (35, aplicando lim (s→o)

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.f'(t).dt = \int_0^\infty [f'(t)].dt = f(\infty) - f(0) = \lim(t \to \infty) f(t) - f(0) \quad (40.1)$$

$$\lim(s \to 0)[L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0) = s.g(s) - f(0)] \quad (40.2)$$

Igualando los términos de la derecha de (40.1) y (40.2) queda demostrada la (40)

8) <u>Teorema del valor inicial</u>

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s.\ g(s) \qquad (41)$$

Se demuestra la ecuación (41) por un proceso similar a la demostración de la (40).

9) <u>Teorema de la convolución o producto de comparación:</u>

Al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace se obtiene un resultado g(s) con el cual luego se recurre a tablas para hallar L^{-1}[g(s)]=f(t) que representa en el dominio temporal la solución a dicha ecuación diferencial.

Puede suceder que la función g(s) no figure en tablas, pero que se la pueda descomponer en 2 funciones $g_1(s)$ y $g_2(s)$ cuyas antitransformadas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ sí figuran en tablas, si se cumple que $g(s)=g_1(s)*g_2(s)$ se aplica entonces el denominado teorema de convolución para hallar:

$$f(t) = L^{-1}[g(s)] = L^{-1}[g_1(s) * g_2(s)] \qquad (42)$$

y se cumple que:

$$L^{-1}[g_1(s) * g_2(s)] = \int_0^t f_1(\varsigma) * f_2(t-\varsigma)d\varsigma = f_1(t) * f_2(t) = f(t) \qquad (43)$$

Siendo $f_1(t)$ y $f_2(t)$ las antitransformadas de $g_1(s)$ y $g_2(s)$ respectivamente y el símbolo * indica que se ha aplicado el teorema de convolución entre $f_1(t)$ y $f_2(t)$.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES IMPORTANTES
FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea la función *f(t)* que es exponencial donde *f(t) = 0* para *t < 0* y es $f(t) = A \times e^{-at}$ para *t > 0*, donde *A* y *a* son constantes.

La transformada de Laplace de esta función será:

$$L\left[A \times e^{-at}\right] = \int_0^\infty A\, e^{-at} e^{-st} dt = A\int_0^\infty e^{-(s+a)} dt = \frac{A}{-(s-a)} \left| e^{-(s+a)t} \right|_0^\infty = \frac{A}{-(s+a)}\left[0-1\right]$$

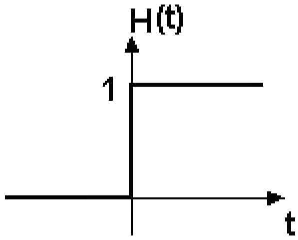
$$L\left[A \times e^{-at}\right] = \frac{A}{s+a} \qquad (44)$$

Como puede verse la función exponencial transformada produce un polo en el plano complejo. Al desarrollar esta transformada se requiere que la parte real de *s* sea mayor que *–a* (la abscisa de convergencia). Una vez obtenida la transformada de Laplace de *f (t)*, se puede considerar válida en todo el plano *s*, a excepción de los polos de *F(s)*.

Funciones temporales especiales.

Veamos ahora algunas funciones temporales especiales que luego aplicaremos al estudio de control de procesos.

FUNCIÓN ESCALÓN



Escalón (Figura 2.7)

Sea la función escalón *H (t)* donde *H (t) = 0* para *t < 0* y *H (t) = 1* para *t > 0* podemos observar que se trata de un caso especial de la función exponencial $A \times e^{-at}$ donde *A = 1* y *a = 1*.

La función escalón quedará definida en *t = 0* y su transformada de Laplace esta dada por:

$$L\left[H(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st} \times H(t) \times dt = \int_0^\infty e^{-st} \times 1 \times dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\times\infty} - e^{-s\times 0}\right] = \frac{1}{s} \qquad (45)$$

Al efectuar la integración, se supuso que la parte real de *s* (abscisa de convergencia) era mayor que cero y por la tanto, que el $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$, y como se dijo antes, la transformada de Laplace así obtenida es válida en todo el plano de *s* excepto en el polo *s = 0*.

La función escalón de altura distinta de la unidad, también se puede escribir como:

$$f(t) = K \times H(t) \qquad (46)$$

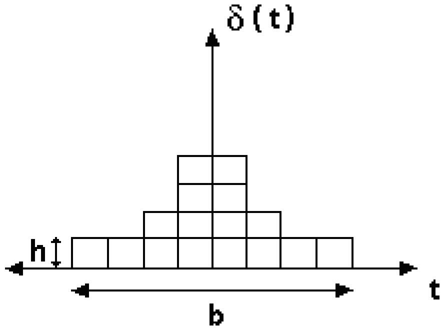
La transformada de Laplace de la función escalón no unitario, por la propiedad de integración de la transformada de Laplace resulta:

$$L\left[K \times H(t)\right] = K \times \frac{1}{s} \qquad (47)$$

Físicamente, a la función escalón, se la puede interpretar como la apertura instantánea de una válvula que da paso a un flujo de materia, o a la conexión de un interruptor que da paso a la corriente eléctrica. Un función escalón producida en *t = 0* corresponde a una señal constante aplicada súbitamente al sistema en el instante en que el tiempo se empieza a contar.

FUNCIÓN IMPULSO

Físicamente la función impulso está representada por un martillazo, un impulso eléctrico, etc. La función impulso se denomina función delta (δ) por la *D* de *Dirac*. A la misma se la puede considerar como la combinación de dos funciones escalón encontradas. Además, decimos que esta función delta es cero para $t = 0$ y toma una gran magnitud, pero limitada, para $t > 0$, ya que el producto de la base por su altura es un valor finito e igual a uno o una constante A. Entonces si consideramos una función escalón $f_1(t)$ y otra función escalón contrapuesta $f_2(t)$, separadas por un intervalo de tiempo igual a A, será:



$$f_1(t)\begin{cases} = 0 \text{ para } t < 0 \\ = \frac{1}{A} \text{ para } t > 0 \end{cases}$$

$$f_2(t)\begin{cases} = 0 \text{ para } t < 0 \\ = \frac{1}{A} \text{ para } t < A \\ = 0 \text{ para } t > A \end{cases}$$

Impulso (figura 2.7)

$f_2(t)$ es una función deslazada de $f_1(t)$, $f_2(t-A)$.

Entonces si las restamos, transformando

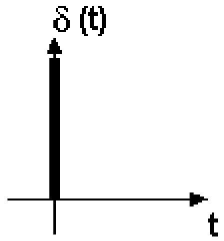
$$L[\delta(t)] = L\{[f_1(t)] - [f_2(t)]\} = \frac{1}{A \times s} - \frac{1}{A \times s} e^{-A \times s} = \frac{1}{A \times s}(1 - e^{-A \times s}) \qquad (48)$$

A medida que $t \to 0$, la altura $1/A \to \infty$, pero el área cubierta por el impulso permanece en una magnitud constante.

Entonces en el límite cuando $A \to 0$ y aplicando L'Hopital,

$$\lim_{A \to 0} L[\delta(t)] = \lim_{A \to 0} \frac{(1 - e^{-A \times s})}{A \times s} = \lim_{A \to 0} \frac{\frac{d}{dA}(1 - e^{-A \times s})}{\frac{d}{dA}(A \times s)} = \lim_{A \to 0} \frac{0 - e^{-A \times s} \times (-s)}{s} = \frac{s}{s} = 1 \qquad (49)$$

Por la tanto, como dijimos, la transformada de Laplace de una función impulso es igual al área bajo el impulso. La función impulso cuya área es uno, se denomina función impulso unitario o función delta de *Dirac*.



Impulso (figura 2.8)

Cabe destacar, que un impulso de magnitud infinita y duración cero no ocurre en los sistemas físicos, sino que es una mera ficción matemática. Pero también es cierto que si la magnitud del impulso de entrada a una sistema es grande y con una duración muy breve en comparación con la constante de tiempo del sistema, esta entrada se puede considerar como una función impulso.

El concepto de función impulso resulta muy útil al diferenciar funciones discontinuas. La función impulso unitaria puede considerarse como la derivada de la función escalón unitario en el punto de discontinuidad $t = 0$,

$$\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt} = H^{'}(t) \qquad (49.1)$$

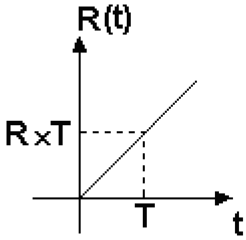
$$L\left[H^{'}(t)\right] = s \times L\left[H(t)\right] - H(0) = s \times \frac{1}{s} - 0 = 1 \qquad (49.2)\ 0\ (49)$$

Inversamente, si se integra la función impulso unitaria resulta que es la función escalón unitario.

FUNCIÓN RAMPA

Esta función se define para interpretar físicamente a fenómenos como el incremento de nivel de un tanque que comenzara a llenarse a partir de un cierto instante, el aumento de temperatura de un horno que se enciende o la apertura gradual de una válvula.

Básicamente, la función es nula antes del tiempo *t = 0* y comienza en ese instante a crecer en forma lineal.



$$f(t)\begin{cases} = 0 \text{ para } t \le 0 \\ A \times t \text{ para } t > 0 \end{cases}$$

Rampa (figura 2.9)

Consideremos la función rampa como *R (t) = R × t*, donde *R (t) = 0* para *t ≤ 0* y *R (t) = R × t* para *t > 0*. Si transformamos,

$$L\left[R(t)\right] = \int_0^{\infty} R \times \underbrace{t \times e^{-s\times t}\, dt}_{A} \qquad (50.1)$$

Integrando por partes, $\int_a^b v \times du = v \times u\Big|_a^b - \int_a^b u \times dv \qquad (50.2)$

Siendo,

$$t = u \qquad dv = \frac{1}{-s} \times e^{-s\times t} \times (-s \times dt) \qquad v = \frac{e^{-s\times t}}{(-s)} \qquad (50.3)$$

Entonces *A* será:

$$A = \int t \times e^{-s\times t} \times dt = t \times \frac{e^{-s\times t}}{(-s)}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{(-s)}\int_0^{\infty} e^{-s\times t} = \left|\frac{t \times e^{-s\times t}}{-s}\right|^{\infty} - \left|\frac{t \times e^{-s\times t}}{-s}\right|^{0} - \frac{1}{-s}\int e^{-s\times t} \times \frac{(-s)}{(-s)} \times dt$$

Aplicando L'Hopital

$$\lim_{t\to\infty} t \times e^{-s\times t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{s\times t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{s \times e^{s\times t}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Quedando:

$$A = 0 - 0 - \frac{1}{-s} \times \frac{e^{-s\times t}}{-s}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{s^2}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{s^2} \qquad (50.4)$$

O sea que:

$$L\left[R(t)\right] = \frac{R}{s^2} \qquad (50)$$

Otra demostración más sencilla es:

$$R(t) = \int_0^T R.H(t)\, dt = R.H(t)\int_0^T dt = R.H(t)T \qquad (51.1)$$

La transformada de Laplace es : $L\left[R(t)\right] = \frac{R}{s^2}$ (51.2) 0 (50)

FUNCIÓN SINUSOIDAL

$$L\left[A.sen(\omega.t)\right] = \frac{A.\omega}{\omega^2 + s^2} \tag{51}$$

$$L\left[A\cos(\omega.t)\right] = \frac{A.s}{\omega^2 + s^2} \tag{52}$$

Recordando el desarrollo en serie de *Taylor* y *McLaurin*, toda función puede calcularse, si es continua y derivable, a partir de un valor reducido inicial por medio de:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} + \ldots \tag{52.1}$$

El desarrollo que se obtiene para la función *sin(x)*, partiendo de *x = 0* es:

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}x + \frac{-\sin(0)}{2!}x^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!} + \ldots = \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{52.2}$$

El desarrollo para la función *cos(x)*, será:

$$\cos(x) = \cos(0) + \frac{-\sin(0)}{1!}x + \frac{-\cos(0)}{2!}x^2 + \ldots = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} - 0 + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{52.3}$$

De igual forma:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots \tag{52.4}$$

Teorema de Euler. Se ve, de las ecuaciones anteriores que:

$$\cos\omega + j\sin\omega = e^{j\omega} \tag{52.5}$$

Veamos como es ésto:

$$\cos\omega + j\sin\omega = 1 + j\omega + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{(j\omega)^3}{3!} + \frac{(j\omega)^4}{4!} + \ldots = \\ = 1 + j\omega + \frac{\omega^2}{2!} - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^4}{4!} + \ldots \tag{52.6}$$

Observando el desarrollo de e^x se puede utilizar el teorema de Euler para expresar el seno y el coseno en términos de una función exponencial. Considerando que $e^{-j\omega}$ es el complejo conjugado de $e^{j\omega}$ será:

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega \\ e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega \tag{52.7}$$

Sumando ambas expresiones:

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) \tag{52.8}$$

Para el seno se obtiene restando las expresiones:

$$\sin\omega = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) \tag{52.9}$$

La transformada de Laplace de la función sinusoidal *f (t)* será:

$L[f(t)] = 0$ para $t < 0$

$L[f(t)] = A \times \sin(\omega \times t)$ para $t > 0$

Siendo *A* y *ω* constantes. Considerando la ecuación (52.9) y transformando,

$$L[A \times \sin(\omega \times t)] = \frac{A}{2j}\int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \times e^{-st}\, dt = \frac{A}{2j}\left[\int_0^{\infty} e^{(j\omega - s)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(j\omega + s)t} dt\right] \quad (52.10)$$

Realizando la integración y simplificando términos,

$$L[A \times \sin(\omega \times t)] = \frac{A}{2j}\left[\left|\frac{1}{j\omega - s} \times e^{(j\omega - s)t}\right|_0^{\infty} + \left|\frac{1}{j\omega - s} \times e^{-(j\omega + s)t}\right|_0^{\infty}\right] = -A\left[\frac{\omega}{-j^2\omega^2 + s^2}\right]$$

Teniendo en cuenta que $j^2 = -1$,

$$L[A \times \sin(\omega \times t)] = \frac{A \times \omega}{\omega^2 + s^2} \qquad (52.11) = (51)$$

Operando del mismo modo, la transformada de Laplace de $A \times \cos(\omega \times t)$ es:

$$L[A \times \cos(\omega \times t)] = \frac{A \times s}{\omega^2 + s^2} \qquad (52.12) = (52)$$

Tabla de operaciones y funciones transformadas

Operación o función	**Función f(t)**	**Transformada F(s)**
Derivadas	$\frac{d}{dt} f(t)$ $\frac{d^2}{dt^2} f(t)$ $\frac{d^3}{dt^3} f(t)$	$s F(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$ $s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$
Integral	$\int f(t)\, dt$	$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0)$
Desplazamiento	$f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$
Impulso unitario	δ(t)	1
Salto unitario Escalón	$H(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t t^n	$\frac{1}{s^2}$ $\frac{n!}{S^{n+1}}$
Senoidales	$sen\ \omega\ t$ $\cos\ \omega\ t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Valor inicial	$\lim_{t \to 0} f(t)$	$\lim_{s \to \infty} s F(s)$
Valor final	$\lim_{t \to \infty} f(t)$	$\lim_{s \to 0} s F(s)$
1er. orden	$(1 - e^{-t/T})$	$\frac{1}{s(Ts+1)}$
Rampa sobre 1er orden	$t - T(1 - e^{-t/T})$	$\frac{1}{s^2(Ts+1)}$
n sistemas de 1er orden	$1-(1+\frac{t}{T}+\frac{t^2}{2T^2}+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)T^{n-1}})*e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(Ts+1)^n}$

- **Función de transferencia**.
-

Veamos como se opera la trasformación de la ecuación diferencial en ecuación algebraica por medio del uso de las transformadas de Laplace. Retomando la ecuación (12)

$$m_n \frac{d^n\, y(t)}{dt^n} + m_{n-1} \frac{d^{n-1}\, y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + m_0\, y(t) = x(t) \qquad (12)$$

Más adelante se verá como dado un proceso particular se pueden plantear la ecuación diferencia. Ahora consideremos que ya la tenemos y es de primer orden porque tiene a la función y a su primera derivada, siguiendo el lineamientos de la (12), tenemos:

$$T * \frac{d\,c(t)}{dt} + c(t) = R * M * H(t) \qquad (53)$$

Donde la función c(t) y su derivada es la que se quiere hallar o resolver.

T= constante de tiempo del sistema.

R = constante del sistema.

M(t) = M*H(t) describe una entrada en escalón de magnitud M al sistema

Si transformamos por Laplace y suponemos que c(0)=0: El miembro de la izquierda de la igualdad resulta:

$$L\left[T * \frac{d\,c(t)}{dt} + c(t)\right] = T * s * C(s) - T * c(0) + C(s) = T * s * C(s) + C(s) \qquad (53.1)$$

El miembro de la derecha de la igualdad resulta:

$$L[R * M * H(t)] = \frac{R * M}{s} \qquad (53.2)$$

igualando ambos miembros de (52.1) y (53.2):

$$T * s * C(s) + C(s) = \frac{R * M}{s} \qquad (54)$$

Resultando:

$$C(s) = \frac{R * M}{s(T * s + 1)} \qquad (55)$$

Antitransformándola, queda:

$$L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{R * M}{s(T * s + 1)}\right] \qquad (56)$$

Finalmente resulta la función c(t) para las condiciones impuestas:

$$c(t) = R * M * \left(1 - e^{-t/T}\right) \qquad (57)$$

En el trabajo matemático del estudio de control de procesos las transformadas de Laplace son útiles para la determinación de la respuesta de cada proceso, en este caso c(t), a distintas perturbaciones, para el caso, una función en escalón de magnitud M.

Como lo que interesa es la variación del proceso en algunas de sus variables, denominada dinámica del proceso, a partir de cierto instante en el cual se introduce una perturbación, puede considerarse a las condiciones anteriores a la perturbación como un estado estacionario o de reposo, o nivel y condición de partida.

De esta manera las condiciones iniciales resultan conocidas simplificando el tratamiento matemático.

Ahora es necesario relacionar el tratamiento de las ecuaciones diferenciales transformadas en ecuaciones algebraicas con el álgebra de diagramas en bloque.

Todo sistema esta caracterizado por la relación que existe entre una variable de entrada y una variable de salida. Esta relación de variables generalmente define, para cada sistema en particular, una función característica para la cual fue diseñada o construida y permite posteriormente estudiar cómo las variaciones de una se reflejan en la otra o sea, cómo la variable de salida o perturbada (output) está relacionada con la variable perturbadora o de entrada (input).

Definimos entonces a la función transferencia de un sistema como la relación que existe entre la variable perturbada o salida, dividida la variable perturbadora o de entrada:

$$Función\,de\,transferencia = \left(\frac{SALIDA}{ENTRADA}\right) = K.G(s) \qquad (58)$$

Que puede ser representada en diagramas en bloque por la figura (2.10)

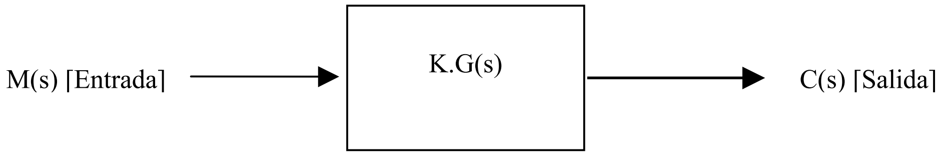


Figura (2.10)

Si analizamos las ecuaciones (54) y (55) vemos que:

$$C(s) = \frac{R * M}{s(T * s + 1)} = \frac{R}{(T * s + 1)} \cdot \frac{M}{s} \qquad (59)$$

en este caso la variable perturbada es C(s) y la variable perturbadora o entrada es M(s

$$M(s) = L[M * H(t)] = \frac{M}{s} \qquad (60)$$

con lo cual la función de transferencia está dada por:

$$Función\,de\,transferencia = \frac{SALIDA}{ENTRADA} = \frac{C(s)}{M(s)} = \frac{R}{T\,s + 1} \qquad (61)$$

característica del proceso, ya que R y T lo son.

Por convención se designa K.G(s), en forma genérica a la función de transferencia de un sistema, y esta nomenclatura se utiliza en los diagramas de control.

También por convención se utilizan letras mayúsculas para la función en el dominio de la variable compleja s y minúsculas en el dominio temporal t.

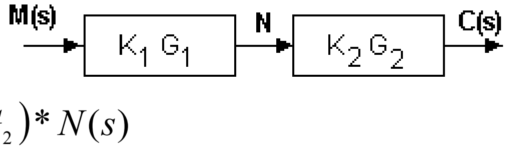
Al utilizar la sigla K.G(s) estamos representando los 2 estados por los que atraviesa un proceso al sufrir una variación en la entrada. Una de ellas, K, representa la parte estática del proceso que no se altera con las variaciones de la entrada y que se denomina ganancia estática del sistema. La otra, representada por G(s), es la porción dinámica que determina la respuesta del proceso. Del ejemplo:

$$K = R \quad y \quad G(s) = \frac{1}{T\,s + 1} \qquad (62)$$

Finalmente veamos como podemos obtener algunas funciones de transferencia del sistema mediante el álgebra de diagrama en bloques:

<u>Caso 1:</u>

Queremos hallar C(s)=f[M(s)] para la cual resolvemos bloque a bloque:



$$C(S) = (K_2\,G_2) * N(s) \qquad (63)$$

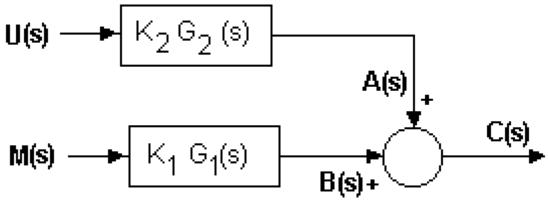
$$N(S) = (K_1\,G_1) * M(s) \;\; (64) \;\; y\,reemplazando\,en \; (63)$$

$$C(S) = (K_1\,G_1) * (K_2\,G_2) * M(s) \qquad (65)$$

y la función de transferencia será:

$$K\,G(S)=\frac{C(S)}{M(S)}=K_1\,G_1(S)K_2\,G_2(S) \qquad (66)$$

<u>Caso 2:</u>



$$C(S)=A(S)+B(S) \qquad (67)$$

$$\left.\begin{aligned}A(S)&=K_2\,G_2(S)*U(s)\\B(S)&=K_1\,G_1(S)*M(s)\end{aligned}\right\}reemplazando\,en\,(67)$$

$$C(S)=K_2\,G_2(S)*U(s)+K_1\,G_1(S)*M(s) \qquad (68)$$

En general, la letra s se las considera tácitamente escrita y se colocan sólo las letras mayúsculas.

También por convención, se denomina con la letra H la función de transferencia del mecanismo de medición de realimentación.

Un diagrama en bloques típico de control, es como el que mostramos en la figura (2.11) donde dentro de cada bloque se han escrito las funciones de transferencia que lo caracterizan individualmente.

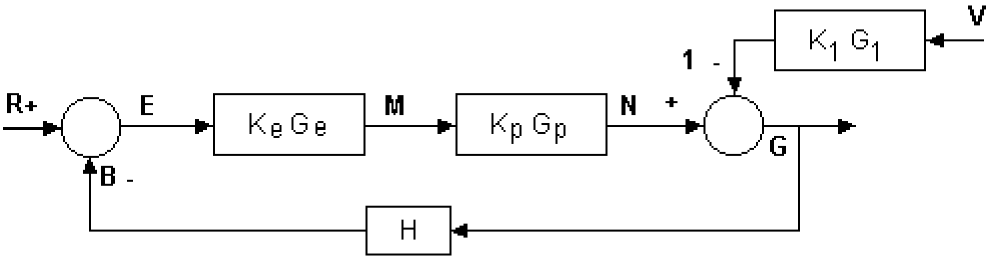


Figura (2.11)

Y las letras mayúsculas (E, M, N, etc) representan las entradas y salidas de los distintos bloques. La salida de cada uno de ellos estará dada por el producto de su función de transferencia y de entrada respectivamente, por ejemplo:

E = R – B, B = H * G, N = Kp Gp * M, M = KeGe * E, I = K1G1 * V, G = N -I (69)

Vemos que el sistema tiene dos entradas R y V y una salida, G

Resulta entonces operando con las expresiones de (63)

$$G=\frac{Kp.Gp*KeGe}{1+Kp.Gp*Ke.Ge*H}R-\frac{K1.G1}{1+Kp.Gp*Ke.Ge*H}V \qquad (70)$$

Esta ecuación es típica de los sistemas realimentados:

La salida es la suma de las entradas, cada una de ellas multiplicadas por los bloques entre su ingreso y salida, dividida por uno más el producto de los bloques del lazo cerrado.

Si bien las funciones de transferencia que hay dentro de cada bloque puede ser muchas y variadas, la mayoría de ellas pueden ser representadas por las combinaciones de 5 funciones de transferencia.

	Tipo de K G(s)	Denominación
1	K	Elemento proporcional
2	$\frac{1}{T\,s}$	Elemento de capacidad
3	$\frac{1}{T\,s+1}$	Elemento de primer orden
4	$\frac{1}{T^2 s^2 + 2\varepsilon T s + 1}$ $o\,bien$ $\frac{1}{T_1\,s^2 + T_2\,s + 1}$	Elemento de segundo orden
5	e^{-LS}	Elemento de tiempo muerto o demora

---0---